შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14	04.05.2014/ მათ/IV/ M4/2

ამოცანა № 4 — გვერდი № 1.

ლ 1. თუ მოცემულია $a_1; b_1; c_1$ მთელი რიცხვები და $c_1 \vdots$ უ.ს.გ$(a_1; b_1) = d$, მაშინ $\exists: x; y \in Z$, რომ $c_1 = a_1x + b_1y$.

$c_1 = d\cdot c$ $a_1 = d\cdot a$ $b_1 = d\cdot b$ $\Rightarrow$ $c = ax + by$, სადაც უ.ს.გ$(a; b) = 1$., ანუ

$c = a(b+x) + b(y-a) = ax + by$. ...

დამტკიცება: განვიხილოთ $c - a\cdot 1; c - a\cdot 2; \dots\ c - a\cdot b$ ეს [illegible] b-ზე [illegible] რიცხვი და [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], ვთქვათ, რომ

თუ $c - ma \equiv c - na \Rightarrow a(m-n) \vdots b \Rightarrow m - n \vdots b$, ანუ $0 < |m-n| < b \Rightarrow$

$\Rightarrow$ [illegible] [illegible] [illegible] და [illegible] [illegible].

$3^{2012} \equiv 1 \equiv 16 \pmod 5$

$$\left.\begin{array}{ll} 3^1 \equiv 3 & (\mathrm{mod}\ 5) \\ 3^2 \equiv 4 & (\mathrm{mod}\ 5) \\ 3^3 \equiv 2 & (\mathrm{mod}\ 5) \\ 3^4 \equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 5) \end{array}\right) \Rightarrow 3^{2012} \equiv 1 \pmod 5.$$

$Q(3^{2012}) \equiv T$

$\cancel{P(x) = a_n}$ $3^{2012} = a_n\cdot 16^n + a_{n-1}\cdot 16^{n-1} + \dots + a_1\cdot 16 + a_0 \equiv a_n + \dots + a_0 \pmod 5$

$T = b_n \cdot 3^{2012\cdot n} + b_{n-1}\cdot 3^{2012(n-1)} + \dots + b_1\cdot 3^{2012} + b_0 \equiv b_n + \dots + b_0 \equiv a_n + \dots + a_0 \equiv 3^{2012} \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow T \equiv 1 \pmod 5$ ცხადია $|T|$-ს უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობა არის 1.

მოვიყვანოთ მაგალითი, როდესაც $Q(3^{2012}) = 1$.

~~$P(x) = ax^2 + bx + c$~~

~~$Q(x) = bx^2 + cx + a$.~~

~~$\Rightarrow \begin{cases} 3^{2012} = a\cdot 16^2 + b\cdot 16 + c \\ 1 = b\cdot 3^{2\cdot 2012} + c\cdot 3^{2012} + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{2012} = a\cdot 16^2 + b\cdot 16 + c \\ 16^2 = 16^2\cdot b\cdot 3^{2\cdot 2012} + 16^2\cdot c\cdot 3^{2012} + 16^2\cdot a \end{cases} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow 3^{2012} - 16^2 = 16b(1 - 16\cdot 3^{2\cdot 2012}) + c(1 - 16^2\cdot 3^{2012})$.~~

~~ვაჩვენოთ უ.ს.გ ვაჩვენოთ, რომ $3^{2012} - 16^2 \vdots$ უ.ს.გ$(16(1 - 16\cdot 3^{2\cdot 2012}); 1 - 16^2\cdot 3^{2012}) = d_1$~~

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

04.05.2014/ მათ/IV/ M412

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$Q(x) = cx^2 + ax + b.$

$$\begin{cases} 3^{2012} = a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c & (1) \\ 1 = c \cdot 3^{2 \cdot 2012} + a \cdot 3^{2012} + b & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{2012} = a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c \\ 16 = 16c \cdot 3^{2 \cdot 2012} + 16a \cdot 3^{2012} + 16b \end{cases}$$

$$3^{2012} - 16 = a\left(16^2 - 16 \cdot 3^{2012}\right) + c\left(1 - 16 \cdot 3^{2 \cdot 2012}\right)$$

$$3^{2012} - 16 = 16a\left(16 - 3^{2012}\right) + c\left(1 - 16 \cdot 3^{2 \cdot 2012}\right)$$

$$\left(1 + 16a\right)\left(3^{2012} - 16\right) = c\left(1 - 16 \cdot 3^{2 \cdot 2012}\right)$$

ავიღოთ $\begin{cases} a = -3^{2 \cdot 2012} \\ c = 3^{2012} - 16 \end{cases} \Rightarrow b = \dfrac{3^{2012} - c - 16^2 a}{16} = \dfrac{3^{2012} - 3^{2012} + 16 + 16^2 \cdot 3^{2 \cdot 2012}}{16} =$

$$= \cancel{16\left(3^{2 \cdot 2012} + 1\right)}\ 16 \cdot 3^{2 \cdot 2012} + 1.$$

ცხადია $ac \neq 0. \Rightarrow P(x)$ და $Q(x)$ ჩვენი პოლინომებია.

$$P(16) = -3^{2 \cdot 2012} \cdot 16^2 + 16\left(16 \cdot 3^{2 \cdot 2012} + 1\right) + 3^{2012} - 16 = 3^{2012}$$

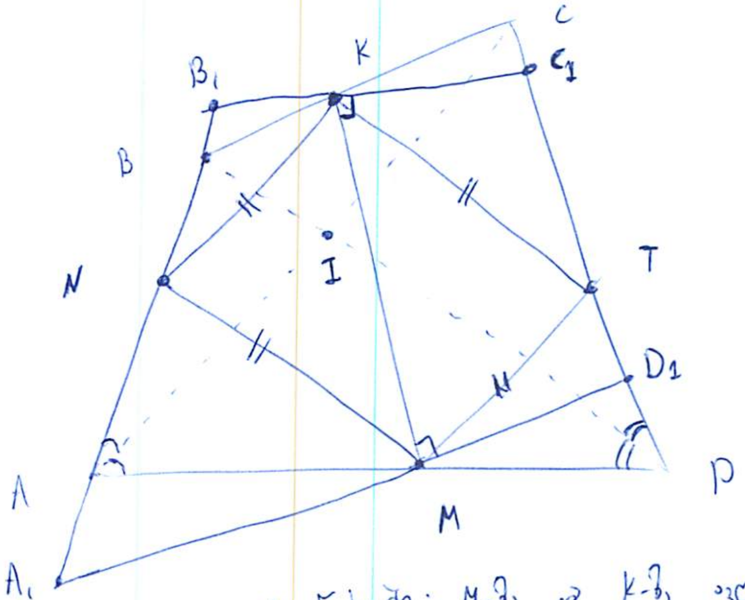
$Q\left(3^{2012}\right)$ ცხადია 1 გამოვა (2) ტოლობიდან გამომდინარე.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14	04.05.2014/ მათ/IV/ M412
ამოცანა № 5	გვერდი № 1.



$M; N; K; T$ იყოს შეხების წერტილები; M-ზე და K-ზე აღვმართოთ MK-ს მართობები წრფეები, რომლებიც კვეთენ AB-ს A_1 და B_1-ში, ხოლო CD-ს C_1 და D_1-ში. MK-ს შუაწერტილი იყოს L. $NL \perp KM$ => და L არის KM-ის შუაწერტილი => NL არის შუახაზი => $A_1N = NB_1$, ~~ანალოგიურად $B_1K = KC_1$ =>~~ ანალოგიურად $C_1T = TD_1$.

=> ~~$NK = \frac{A_1C_1}{2}$~~ M

KM NT-ს ყოველ შუაზე და NT არის შუახაზი => K და M არის B_1C_1 და A_1D_1-ის შუაწერტილები => $NK = \frac{A_1C_1}{2}$ $NM = \frac{B_1D_1}{2}$ =>

=> $A_1C_1 = B_1D_1$ => ტოლფერდა ტრაპეციაა.

$AC \cap BD \equiv I$ I-დან მანძილი A_1B_1-მდე და მანძილი C_1D_1-მდე ტოლია $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $I \in KM$, ანალოგიურად $I \in NT$ $\Rightarrow$ $I = KM \cap NT$. $\Rightarrow$ $KI = IM$

ასეთი რომბი ავიღოთ ოთხკუთხედი, რადგან თუ [illegible] $K'T'M'N'$ რომბი,

ვიცით, რომ ~~$KI = IM$ და $K'I = M'I$ $\Rightarrow$ $KK'MM'$ არის პარალელოგრამი $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow MM'H$~~ $N'I = IT'$ და $NI = IT$ $\Rightarrow$ $NN'TT'$ არის პარალელოგრამი $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $NN' \parallel TT'$, რაც ნიშნავს რომ ჩვენი AN და ~~BD~~ BT კვეთენ C-ში

$ED \cap AB \equiv L$ განვიხილოთ CI სხივზე CI-ს ტოლი მონაკვეთი IS.

ცხადია $NCTS$ იქნება პარალელოგრამი $\Rightarrow$ N და T [illegible] შუაწერტილი S ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ ... $SN \parallel CB$ და $ST \parallel AC$ $\Rightarrow$ ავაგოთ რომბის წვეროები.

~~ავაგოთ~~ ავაგოთ S-ს, ანუ S-იდან გავავლოთ AC და CB-ს პარალელური და

მოვნიშნოთ T და N-ს, ანუ I-ზე გავავლოთ მართობი NT-სას და ვიპოვოთ ED და

AB-სთან კვეთა K და M-ს. ახლა ადვილი შესამჩნევია რომ ამ რომბის φ არსებობს

~~[illegible]~~ აუცილებელია $\varphi \le \max\{\angle CAB; \angle CBA\}$.